Να υπολογιστεί το Πολυώνυμο Taylor $3^{ου}$ βαθμού σε μια περιοχή του 0 για τη συνάρτηση $f(x) = Arccos x$ και να το χρησιμοποιήσετε για τον υπολογισμό της τιμής. $Arccos\frac{\pi}{5}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αφού μιλάμε για πολυώνυμο Taylor $3^{ου}$ βαθμού, τότε:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

Για $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 =$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot f'''(0)\cdot x^3 \quad ①$$

- $f(x_0) = Arccos x_0 \Rightarrow y = Arccos x_0 \Rightarrow \cos y = x_0 \xRightarrow{x_0=0} \cos y = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x_0=0) = \frac{\pi}{2}$.

- $f'(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \xRightarrow{x_0=0} f'(0) = -1$

- $f''(x_0) = \frac{(\sqrt{1-x_0^2})'}{(1-x_0)} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x_0^2}}\cdot(-\cancel{2}x_0)}{1-x_0^2} \xRightarrow{x_0=0} f''(0) = 0$

- $f'''(x_0) = \left(-\frac{x_0}{(1-x_0^2)\sqrt{1-x_0^2}}\right)' = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{(1-x_0)^3}}\right)' =$

$$= \frac{-\sqrt{(1-x_0)^3} + x_0\frac{1}{2\sqrt{(1-x_0)^3}}\cdot((1-x_0)^3)'}{(1-x_0)^3} =$$

$$= \frac{-\sqrt{(1-x_0)^3} + x_0\cdot\frac{1}{2\sqrt{(1-x_0)^3}}\cdot 3(1-x_0)^2\cdot(-1)}{(1-x_0)^3} \xRightarrow{x_0=0} f'''(0) = -1.$$

Άρα, η ① $\rightsquigarrow$ $f(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{6}\cdot(-1)\cdot x^3 = -\frac{1}{6}x^3 - x + \frac{\pi}{2}$

για $x = \frac{\pi}{5}$ τότε

$$f\left(\frac{\pi}{5}\right) = Arccos\frac{\pi}{5} = -\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{5}\right)^3 - \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2} \ldots$$

Αναπτυγμα Taylor

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

Να προσεγγίσετε τη συνάρτηση $f(x)$ σε μια περιοχή του σημείου $x_0 = 0$ με ένα πολυώνυμο Taylor $3^{ου}$ βαθμού.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή, να υπολογίσετε την τιμή $f(1) = \frac{\sin 1}{e}$

ΛΥΣΗ

Αφού μέχρι $3^{ου}$ βαθμού τότε έχουμε:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0)$$

$x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{(x-0)}{1!} f'(0) + \frac{(x-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(x-0)^3}{3!} f'''(0)$$

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f'''(0) \quad (*)$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad ① \rightsquigarrow f(0) = \frac{\sin 0}{e^0} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x} \quad ② \rightsquigarrow f'(0) = \frac{\cos 0 - \sin 0}{e^0} = 1$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{\cos x}{e^x} \quad ③ \rightsquigarrow f''(0) = -2 \frac{\cos 0}{e^0} = -2$$

$$f'''(x) = 2 \cdot \frac{\sin x + \cos x}{e^x} \quad ④ \rightsquigarrow f'''(0) = 2 \frac{\sin 0 + \cos 0}{e^0} = 2$$

Άρα $(*)$ είναι:

$$f(x) = 0 + x \cdot + \frac{x^2}{2} \cdot (-2) + \frac{x^3}{6} \cdot 2 = x - x^2 + \frac{x^3}{3}$$

ΔΗΛΑΔΗ $\quad \frac{\sin x}{e^x} \cong x - x^2 + \frac{x^3}{3}$

Ανάπτυγμα Taylor

ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^3+5x$ (•)

Να γράψετε την $f(x)$ στη μορφή:

$$f(x)=a_0+a_1\cdot(x-1)+a_2\cdot(x-1)^2+a_3\cdot(x-1)^3+a_4(x-1)^4. \quad (*)$$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να γραφεί η συνάρτηση ως

$$f(x)=\sum_{n=0}^{4} a_n\,(x-1)^n \quad \text{ή} \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

όπου με αντιστοιχία τα a_n θα είναι οι όροι $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Οπότε βήμα-βήμα έχουμε:

- Στην $(*)\longrightarrow f(1)=a_0$ αλλά $(\bullet)\longrightarrow f(1)=2 \Rightarrow \boxed{a_0=2}$
- όπου $f'(x)=a_1+2a_2\cdot(x-1)+2a_3\cdot(x-1)^2+2a_4\cdot(x-1)^3$

  με $f'(1)=a_1$

  αλλά $f'(x)=4x^3-12x^2+5 \Rightarrow f'(1)=-3 \Rightarrow \boxed{a_1=-3}$
- όπου $f''(x)=2a_2+2\cdot3a_3(x-1)+4\cdot3\cdot a_4\cdot(x-1)^2$

  με $f''(1)=2a_2$

  αλλά $f''(x)=12x^2-24x \Rightarrow f''(1)=-12 \Rightarrow \boxed{a_2=-6}$
- όπου $f'''(x)=6a_3+24a_4(x-1)$

  με $f'''(1)=6a_3$

  αλλά $f'''(x)=24x-24 \Rightarrow f'''(1)=0 \Rightarrow \boxed{a_3=0}$
- όπου $f^{(4)}(x)=24a_4$

  με $f^{(4)}(1)=24a_4$

  αλλά $f^{(4)}(x)=24 \Rightarrow f^{(4)}(1)=24 \Rightarrow 24a_4=24 \Rightarrow \boxed{a_4=1}$

Άρα, $f(x)=2-3(x-1)-6(x-1)^2+(x-1)^4$.